

➤ **Exercice N°1 :**

Répondre par vrai ou Faux sans justification :

1) Soit z un nombre complexe tel que $|z - 2| = |z + 2|$ alors z est un imaginaire.

2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1+x^2} - x - 1 = 1.$

3) La droite $D : y = 4x + 3$ est une asymptote pour une courbe de f au voisinage de $+\infty$ alors

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(2x) - 8x = 3.$$

➤ **Exercice N°2 :**

Dans le plan complexe P rapporté à un repère ON direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ on désigne par A et B les points d'affixes respectives i et 2 . A tout point M du plan d'affixe z ($z \neq 2$) on associe le point M' d'affixe z' défini par :

$$z' = \frac{z - i}{i z - 2i}.$$

1) Déterminer l'ensemble Γ des points $M(z)$ tel que z' soit imaginaire.

2) a) Montrer que pour tout points $M(z \neq 2)$ on a : $OM' = \frac{AM}{BM}.$

b) En déduire l'ensemble des points M' lorsque M décrit la médiatrice du segment $[AB]$.

3) On suppose que $z \neq i$ et $z \neq 2$.

a) Montrer que $(\vec{u}, \widehat{OM'}) \equiv (\vec{BM}, \widehat{AM}) - \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

b) En déduire que si M appartient à la droite (AB) , le point M' appartient à une droite que l'on déterminera.

➤ **Exercice N°3 :**

Soit $\theta \in [0, 2\pi]$

1) Mettre sous forme trigonométrique les nombres complexes $(1 + i)e^{i\theta}$ et $(1 - i)e^{i\theta}$.

2) Dans le plan complexe on désigne par A, B, M_1 et M_2 les points d'affixes respectifs $e^{i\theta}$; $2e^{i\theta}$;

$$z_1 = \sqrt{2} e^{i\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)} \text{ et } z_2 = \sqrt{2} e^{i\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)}.$$

a) Montrer que $M_1 * M_2 = A$.

b) Calculer $\frac{z_1}{z_2}$ et déduire que OM_1BM_2 est un carré.

3) a) Pour $\theta = \frac{\pi}{3}$, Ecrire z_A sous forme algébrique

b) Déduire des questions précédentes $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right).$

➤ **Exercice N°4 :**

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par :
$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{\pi}{x}\right) & \text{si } x < 0 \\ \frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{x} & \text{si } x > 0 \end{cases}.$$

1) Montrer que pour tout $x < 0$, $-x^2 \leq f(x) \leq x^2$. En déduire $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$.

2) Montrer que f est prolongeable par continuité en 0 et définir ce prolongement.

3) a) Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

b) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. Interpréter le résultat obtenu.

4) La figure ci-dessous représente la courbe d'une fonction g définie sur $\mathbb{R}$ et admettant les droites d'équations $y = 0$ comme asymptote au voisinage de $-\infty$ et $y = -x$ comme asymptote au voisinage de $+\infty$.

Par une lecture graphique :

a) Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) + x$.

b) Déterminer $g([1, +\infty[)$ et $g(]-\infty, 2])$.

c) Déterminer les domaines des définitions des fonctions composées $f \circ g$ et $g \circ f$.

d) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f \circ g)(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} (g \circ f)(x)$.

5) Calculer $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 \sin\left(\frac{\pi}{x}\right) + 4}{x + 2}$.

